Egzamin z Analizy Matematycznej II.1 2023/24
26 stycznia 2024 (termin zerowy)

Za rozwiązanie każdego z zadań 1–4 można uzyskać 10 punktów. **Rozwiązanie każdego z zadań 1–4 należy oddać na osobnej kartce, podpisanej swoim imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu.** *Rozwiązania należy szczegółowo uzasadnić, powołując się na fakty znane z wykładu bądź z ćwiczeń.*

Zadanie 1. Wyznaczyć maksymalną i minimalną wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{20}z^2$$

na zbiorze $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2y + z = 10, \quad x^2 + y^2 - z = 0\}$.

Zadanie 2. Uzasadnić, że układ równań

$$\begin{cases} (1+x)e^u + (2+y)e^v = 4, \\ ue^y - 3ve^x = 0 \end{cases}$$

jednoznacznie wyznacza na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$ zmienne (u,v) jako funkcje, odpowiednio, $g_1(x,y), g_2(x,y)$, klasy C^1. Wykazać, że na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$ funkcje g_1, g_2 są dodatnie, natomiast ich pochodne kierunkowe w punkcie $(0,0)$ w kierunku wektora $[1,1]$ są ujemne.

Zadanie 3. Niech

$$f_{n,\alpha}(x) = \left(1 + \frac{2x}{n^2}\right)^{\alpha n^2} e^{-3\alpha x} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \alpha > 0.$$

Wyznaczyć granicę

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left(\lim_{n \to \infty} \int_{(0,1)} f_{n,\alpha} \, d\lambda_1 \right).$$

Zadanie 4. Mówimy, że ciąg funkcji $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zbiega do funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *niemal jednostajnie*, jeżeli zbiega do f jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnym niemal jednostajnie do funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ całkowalnej na $\mathbb{R}^n$. Ponadto, f_n spełnia warunek

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists R_\epsilon : \forall n \in \mathbb{N} \int_{\{\|x\| > R_\epsilon\}} |f_n| d\lambda_n < \epsilon.$$

Wykazać, że funkcje f_n są całkowalne na $\mathbb{R}^n$ oraz

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n.$$